Föreläsning 3

Kontinuitet

Låt $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ vara en funktion. Löst talat så säger vi att f är kontinuerlig om vi kan rita dess graf utan att lyfta pennan.

För den formella definitionen så behöver vi några fler definitioner.

Def: (Inre punkt, Ändpunkt)

Låt $[a,b]$ vara ett intervall. En punkt $p \in [a,b]$ sägs vara en inre punkt om det finns ett öppet intervall $p \in (c,d) \subset [a,b]$.

Om p inte är en inre punkt så är p en ändpunkt.

Ex:

$[a,b]$, då är a och b ändpunkter medan alla andra punkter är inre punkter.

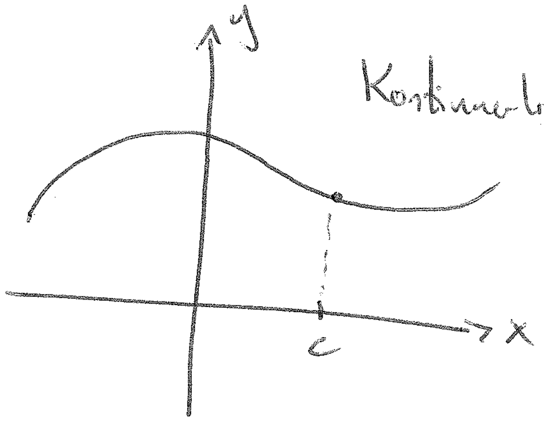
Def:

Låt $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ vara en funktion. Vi säger att f är kontinuerlig i en inre punkt $c\in(a,b)$ om

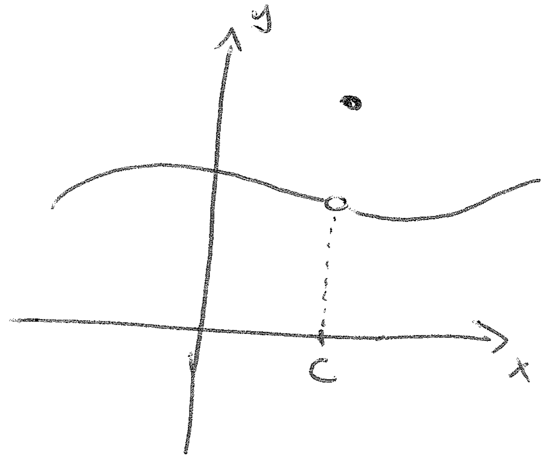
$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Om $\lim_{x\to c} f(x)$ inte existerar eller $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ så säger vi att f är diskontinuerlig i c.

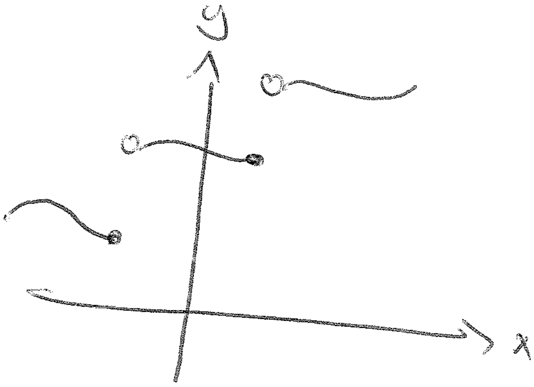
Ex:



Kontinuerlig



Diskontinuerlig

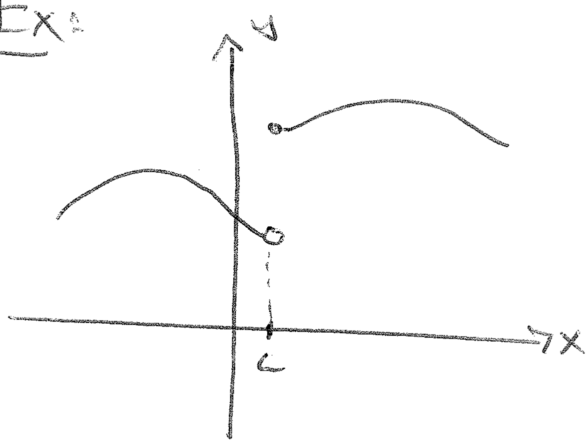


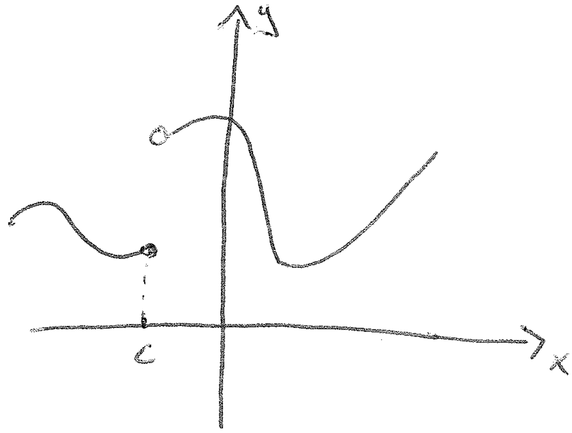
Diskontinuerlig

Def:

- Vi säger att $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ är högerkontinuerlig i c om $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f(c)$
- Vi säger att $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ är vänsterkontinuerlig i c om $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = f(c)$.

Ex:





Högerkontinuerlig   Vänsterkontinuerlig

Ej kontinuerliga.

Sats:

Låt $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

f är kontinuerlig i $c \in (a,b)$

$\Longleftrightarrow$

f är höger och vänster kontinuerlig i c.

Def:

Låt $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

1/ Vi säger att f är kontinuerlig i a om f är höger kontinuerlig där.

2/ Vi säger att f är kontinuerlig i b om f är vänster kontinuerlig där.

Ex:

Exempel på kontinuerliga funktioner.

- Alla polynom; $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.
- Alla rationella funktioner; $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$.
- $f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- $f(x) = |x|$.

⑤

Med hjälp av dessa kontinuerliga funktioner kan man konstruera väldigt många fler kontinuerliga funktioner.

~~[illegible]~~

Def.

Vi säger att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig på hela intervallet (då säger man att f är kontinuerlig) om f är kontinuerlig i varje punkt $c \in [a,b]$.

Fakta:

Om f och g är kontinuerliga så är

1) $f \pm g$ kontinuerliga
2) $f \circ g$ kontinuerliga
3) kf kontinuerlig för $k \in \mathbb{R}$
4) $\frac{f}{g}$ kontinuerlig om $g \neq 0$. på definitionsområdet.
5) $(f(x))^{1/n}$ om $f(x) > 0$ då n är jämn.
6) Om f är kontinuerlig på $D(g)$ så är $f \circ g$ kontinuerlig.

⑥

Kom ihåg att vi studerade funktionen $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ i föreläsning 2. Vi såg då att $x=1$ var en singularitet för f men vi såg även att $\lim_{x\to 1} f(x)=3$. Definierar vi en ny funktion

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\neq 1 \\ 3 & ; x=1 \end{cases}$$

så blir F kontinuerlig och vi kallar F för f:s kontinuerliga utvidgning. Observera att f inte är kontinuerlig i $x=1$.

Låt oss beskriva denna metod mer generellt. Antag att $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ är en rationell funktion. Antag vidare att $h(c)=0$ för någon punkt c. Antag vidare att $\lim_{x\to c} f(x)=L$, dvs existerar. Observera att f uppenbart inte är kontinuerlig i $x=c$. Definiera

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & ; x\neq c \\ L & ; x=c \end{cases}$$

Då är F kontinuerlig i $x=c$, så F är en kontinuerlig utvidgning av f i punkten c.

Ex:

Betrakta $f(x) = \frac{1+x^3}{1-x^2}$. Då är f diskontinuerlig i $x=1$ och $x=-1$. Vi kan göra en kontinuerlig utvidgning av f i $x=-1$, ty täljaren är också noll i $x=-1$.

Vi har att

$$\frac{1+x^3}{1-x^2} = \frac{1+x^3}{(1+x)(1-x)}.$$

Polynomdivision ger att

$$
\begin{array}{l}
1+x^3 : (1+x) = x^2 - x + 1 \\
\underline{-(x^2+x^3)} \\
1-x^2 \\
\underline{-(-x-x^2)} \\
1+x \\
\underline{-(1+x)} \\
0
\end{array}
$$

Därför är

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x+1)(\cancel{1+x})}{(\cancel{1+x})(1-x)} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$$

Definiera

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \neq -1 \\ \frac{3}{2} & ; x = -1. \end{cases}$$

Då är F kontinuerlig i $x=-1$.

Ex:

Betrakta funktionen $f(x) = \begin{cases} x - m & ; x < 3 \\ 1 - mx & ; x \geq 3. \end{cases}$

för något m. Bestäm m så att f blir kontinuerlig för alla x.

För att f ska vara kontinuerlig för alla x så får det inte finnas något hopp i funktionen. Därför måste

$$x - m = 1 - mx \quad \text{för } x = 3.$$

Alltså är

$$3 - m = 1 - 3m$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2m = -2 \Leftrightarrow \underline{m = -1}.$$

Detta ger att

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & ; \quad x < 3 \\ 1 + x & ; \quad x \geq 3. \end{cases} = \underline{x + 1}.$$

Kontinuerliga funktioner har flera egenskaper. Vi ska diskutera några framgent.

Antag att $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ är en kontinuerlig funktion. Då antar f ett absolut maximum och ett absolut minimum. Detta betyder att det finns $P_{max} \in [a,b]$ och $P_{min} \in [a,b]$ så att

$$\underbrace{f(P_{min})}_{\text{Absolut min.}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(p_{max})}_{\text{Absolut max.}} \quad \forall x.$$

Detta betyder även att f är begränsad, dvs det finns ett $K > 0$ så att

$$|f(x)| \leq K \iff -K \leq f(x) \leq K$$

Enligt ovan så kan vi välja $K = \max(|f(p_{min})|, |f(p_{max})|)$

<u>Anm:</u>

Max och minpunkter kan man förstås hitta genom att rita grafen för f.

Andra metoder ska vi lära oss senare, då man använder derivatan.

Fler egenskaper för kontinuerliga funktioner.

Satsen om mellanliggande värden:

Antag att $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Om s är ett tal mellan $f(a)$ och $f(b)$, då finns det ett $c \in [a,b]$ så att $f(c) = s$.

Denna sats kan man t.ex använda för att visa att polynom plötslan nollställen, dvs rötter till ekvationen $p(x) = 0$.

Ex:

Betrakta polynomet $p(x) = x^3 - 15x + 1$. Visa att p har tre nollställen på intervallet $[-4,4]$.

Observera att
$$p(-4) = (-4)^3 - 15\cdot(-4) + 1 = -64 + 60 + 1 = -3$$
$$p(4) = 64 - 60 + 1 = 5$$

Detta betyder att, ty 0 ligger mellan -3 och 5, p har ett nollställe enligt Satsen ovan.

Vi måste hitta 2 till.

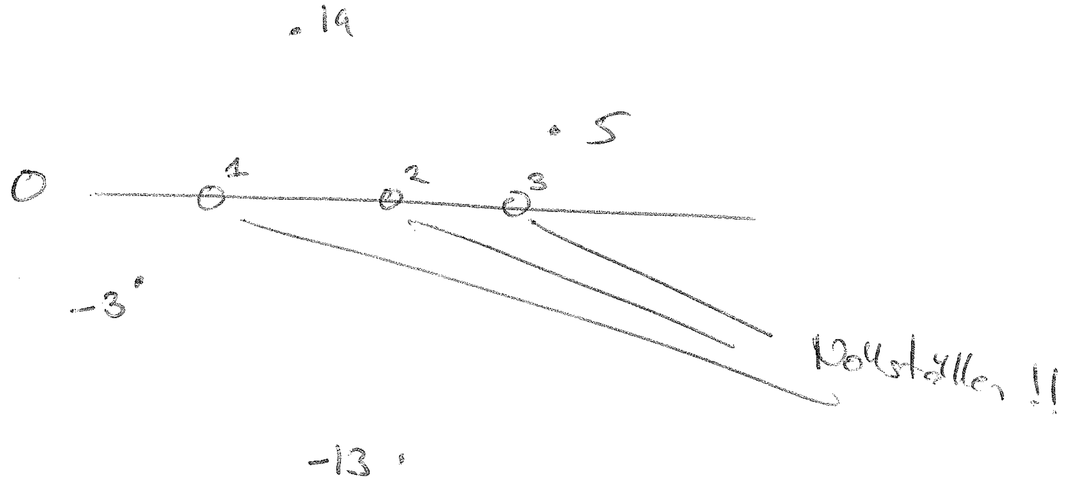
forts ex.

Vi har att

$$p(-3) = -27 + 45 + 1 = 19$$

$$p(1) = 1 - 15 + 1 = -13$$

Detta betyder att p går från -3 till 19 till -13 till 5. Använd nu satsen ovan för att se att p har tre nollställen på [-4, 4].



Ex:

Påst: Antag att $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $0\le f(x)\le 1$ för alla $x\in[0,1]$. Vi vill se att det finns ett $c\in[0,1]$ så att $f(c)=c$.

Bevis:

Om $f(0)=0$ eller $f(1)=1$ så har vi hittat vårt c, nämligen $c=0$ eller $c=1$. Om inte detta gäller betrakta $g(x)=f(x)-x$. Då är g kontinuerlig på $[0,1]$. Vi har att

$g(0)=f(0)-0=f(0)>0$ ty $f(0)\neq 0$

och

$g(1)=f(1)-1<0$ ty $f(1)\neq 1$

Om $f(c)=c$ så är $g(c)=0$, så vi vill hitta g:s nollställen på $[0,1]$. Men $g(0)>0$ och $g(1)<0$ så satsen om mellanliggande värden ger att det finns ett nollställe till g mellan $g(0)$ och $g(1)$, varvid det finns ett c så att $g(c)=f(c)-c=0$, dvs $f(c)=c$.